# MODELOS DINAMICOS

## TEMAS A ANALIZAR

# 1. TIPOS DE MODELOS

UNIVARIANTES

ARIMA - Box Jenkins

ARIMA
ARIMA ESTACIONALES
ARIMA IA
ARFIMA

OTROS TRATAMIENTOS UNIVARIANTES

HOLT WINTERS
ALISADO LINEAL
(FILTROS)

MULTI VARIANTES
(Varias series)

VECTORES AUTOREGRESIVOS (VARs)

VECTORES MEDIAS MÓVILES (VMAs)

COINTEGRACIÓN

VECTOR MECANISMO CORR. ERROR (VECM)

MULTI ECUA-CIONA-LES

(en general)

RETARDO DISTRIBUIDO AUTOREGR. (ADL)

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA
MECANISMO CORR. ERROR (ECM)
MODELOS ARMAX
EC. ESTOCÁSTICA EN DIFERENCIAS

UNI ECUA-CIONA-LES

(en general)

## 2. MODELOS DINAMICOS

### *2.1. FUNCION DE TRANSFERENCIA*

- Un modelo explicativo de la variable $\boldsymbol{y}_t$ a partir de una variable explicativa $\boldsymbol{x}_t$, ligada con la primera por una estructura de retardos racional, recibe el nombre de FUNCION DE TRANSFERENCIA y puede expresarse como:

$$y_t = \frac{B(L)}{A(L)} x_t + \frac{q(L)}{f(L)} e_t \qquad [1]$$

- El primer término del lado derecho corresponde a la dinámica sistemática del modelo, mientras que el segundo término refleja la dinámica de las perturbaciones.

### *2.2. ECUACION ESTOCÁSTICA EN DIFERENCIAS*

- Una transformación de [1] puede plantearse a partir de las siguientes definiciones:

$$a^*(L) = A(L) \,.\, f(L)$$

$$b^*(L) = B(L) \,.\, f(L)$$

$$q^*(L) = q(L) \,.\, A(L)$$

- De esta forma, puede plantearse una formulación alternativa

$$a^*(L)\; y_t = b^*(L)\; x_t + q^*(L)\; e_t \qquad [2]$$

que recibe el nombre de ECUACION (o MODELO) ESTOCASTICA EN DIFERENCIAS (FINITAS).

- En [2] la perturbación sigue un proceso de medias móviles.

Bajo el supuesto de invertibilidad, se podrá aproximar mediante un proceso autoregresivo. De esta manera, [2] puede expresarse como:

$$a(L)\ y_t \ = \ b(L)\, x_t \ + e_t \qquad [3]$$

donde:

$$a(L) = \frac{a^*(L)}{q^*(L)} \qquad b(L) = \frac{b^*(L)}{q^*(L)}$$

Suponiendo **k** variables explicativas:

$$a(L)\ y_t \ = \ \sum_{j=1}^{k} b_j(L)\ x_{jt} \ + \ e_t \qquad [4]$$

- El modelo es estable si las raíces de $\alpha(L)$ caen fuera del círculo unidad.
- La formulación en términos de ecuaciones estocásticas en diferencias es la empleada en la denominada metodología de la LSE.
- Se comienza formulando un modelo general para luego, a través de contrastes, llegar a modelos más simples. Esta metodología recibe el nombre DE LO GENERAL A LO ESPECIFICO.
- En [3] y [4] se tienen especificaciones en que las perturbaciones son ruidos blancos. En el caso de la función de transferencia, ecuación [1], los estimadores por MCO no son consistentes. Otros ejemplos, como la ecuación que surge de un supuesto de distribución de Koyck de los retardos, también implican la inconsistencia de los MCO.
- A. Harvey plantea repetidamente que debe abandonarse la "óptica" de los MCO para considerar los estimadores MV.

### *2.3. DINAMICA SISTEMATICA*

- Tanto en el modelo [1] de función de transferencia, como en la ecuación estocástica en diferencias, [2], el comportamiento de largo plazo de la variable $\boldsymbol{y}_t$ queda determinado por su dinámica sistemática.

- La trayectoria de la media de $\boldsymbol{y}_t$ está dado por (en el caso de [1]):

$$E(\, y_t \,) \;=\; \frac{B(L)}{A(L)}\, x_t$$

- La naturaleza de la respuesta esperada de ***y*** ante cambios en ***x*** dependerá del patrón de los coeficientes del polinomio cociente B(L)/A(L)

- Si el modelo es estable, puede plantearse una solución <u>de equilibrio</u>, o de <u>largo plazo</u>.

  Sea $\boldsymbol{x}_t$ constante en el valor $\bar{x}$

  La solución de equilibrio de ***y*** ( $\bar{y}$ ) será:

$$\bar{y} \;=\; \frac{b_o + b_1 + \ldots b_s}{1 - a_1 - \ldots - a_r}\,\bar{x} = \frac{B(1)}{A(1)}\,\bar{x}$$

### *2.4. RETARDO DISTRIBUIDO AUTORREGRESIVO Y MODELOS ARMAX*

- La formulación [4] recibe también el nombre de RETARDO DISTRIBUIDO AUTORREGRESIVO (ADL por su sigla en inglés) y generalmente se nota como ADL($r, s_1, ..., s_k$) donde los términos entre paréntesis indican el grado de los respectivos polinomios autoregresivos.

- Si en lugar de especificar una perturbación ruido blanco, se plantea un modelo MA:

$$a(L)\ y_t = \sum_{j=1}^{k} b_j(L)\ x_{jt} + q(L)e_t \qquad [5]$$

el modelo resultante recibe el nombre de ARMAX.

# 3. MECANISMO DE CORRECCION DE ERROR - MODELO CON UNA VARIABLE EXPLICATIVA

## *3.1. RELACIONES DE LARGO Y CORTO PLAZO*

- Retomando el modelo [3]:

$$a(L)\; y_t \;=\; b(L)\; x_t \;+\; e_t$$

$$(1 - a_1 L - a_2 L^2 - \dots - a_r L^r)\, y_t \;=$$
$$= (b_o + b_1 L + b_2 L^2 + \dots + b_s L^s)\, x_t \;+\; e_t$$

Debe observarse que las series económicas tienen cambios generalmente lentos, por lo que es posible que la estimación de un modelo como el anterior conduzca a varianzas grandes de los estimadores por multicolinealidad.

- Como alternativa a la especificación anterior, puede plantearse:

$$y_t = a\; y_{t-1} + \sum_{j=1}^{r-1} a^*_j \Delta y_{t-j} + \qquad [6]$$
$$+ b\; x_t + \sum_{j=0}^{s-1} b^*_j \Delta x_{t-j} + e_t$$

donde:

$$a \;=\; \sum_{k=1}^{r} a_k$$

$$a^*_j \;=\; -\sum_{k=j+1}^{r} a_k \qquad j = 1, 2, \dots, r-1$$

$$b \;=\; \sum_{k=0}^{s} b_k$$

- La solución de equilibrio para ***y*** viene dada por:

$$\bar{y} = \frac{b}{1-a}\,\bar{x}$$

Obsérvese que la suma de coeficientes del polinomio $\alpha(L)$ en [3] es justamente:

$$1-a = 1-\sum a_k$$

- Restando $\boldsymbol{y}_{t-1}$ en ambos miembros, etc., obtenemos:

$$\Delta y_t = \sum_j a_j^* \Delta y_{t-j} + \sum_j b_j^* \Delta x_{t-j} + \\ +(a-1)\left[y_{t-1} - \left(\frac{b}{a-1}\right)x_{t-1}\right] + e_t \qquad [7]$$

Obsérvese que si $y_t$ es I(1), entonces $\Delta y_t$ será I(0).

De esta forma, la expresión [7] solo tiene sentido si las series $x_t$ y $y_t$ están cointegradas.

Es decir,

$$(x_t,\ y_t\ ) \sim CI(1,1)$$

(Si $y_t$ es integrada de mayor orden, el MCE tiene una formulación más compleja).

La relación de cointegración (de equilibrio a largo plazo) es, justamente:

$$y_t + g\ x_t = z_t \sim \mathrm{I}(0)$$

$$donde\ g = -\left( \frac{b}{a - 1} \right)$$

La expresión:

$$[\ y_{t-1} - (\ \frac{b}{a - 1}\ )\, x_{t-1}\ ]$$

recibe el nombre de Término de Corrección del Error (Error Correction Term - ECT, en inglés), ya que corresponde al residuo (o error) del período previo. Es decir, al "apartamiento" del equilibrio en el período previo.

De ahí, el modelo recibe el nombre de Mecanismo de Corrección del Error.

De esta forma, la ecuación [7] describe la dinámica de corto plazo (el ajuste al equilibrio). El coeficiente del ECT $(\alpha-1)$ se espera que sea negativo. Es decir, residuos o desvíos del equilibrio positivos contribuyen a $\Delta y_t < 0$ y viceversa con desvíos negativos.

## 4. UNA TIPOLOGÍA DE MODELOS UNI-ECUACIONES DINÁMICOS

(Basado en Hendry, Pagan y Sargan, 1984))

El modelo ADL(1,1) es:

$$y_t = b_1 x_t + b_2 x_{t-1} + b_3 y_{t-1} + e_t \qquad [8]$$

donde $z_t$ es exógena débil en relación a los parámetros de interés ($\beta_1$, $\beta_2$ y $\beta_3$), y el error es: $e_t \sim IN(0, s^2_e)$

Aún cuando todos los modelos tienen una varianza del error, el modelo anterior es denominado modelo de "tres parámetros".

Pese a que [8] es una ecuación muy simple, el modelo ADL(1,1) incluye (*encompasses*) representaciones esquemáticas de nueve distintos tipos de modelos dinámicos como casos especiales. La tabla siguiente presenta estos 9 tipos.

| Tipo de modelo | Ecuación | Restricciones en ADL(1,1) |
|---|---|---|
| (a) Regresión estática | $y_t = \beta_1 x_t + v_t$ | $\beta_2 = \beta_3 = 0$ |
| (b) Serie de tiempo univariante | $y_t = \beta_3 y_{t-1} + v_t$ | $\beta_1 = \beta_2 = 0$ |
| (c) En diferencias / tasa de crecimiento | $\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_{t-1} + v_t$ | $\beta_3 =1$, $\beta_2 = - \beta_1$ |
| (d) Indicador adelantado (*leading indicator*) | $y_t = \beta_2 x_{t-1} + v_t$ | $\beta_1 = \beta_3 = 0$ |
| (e) Retardos distribuidos (*distributed lags*) | $y_t = \beta_1 x_t + \beta_2 x_{t-1} + v_t$ | $\beta_3 = 0$ |
| (f) Ajuste parcial | $y_t = \beta_1 x_t + \beta_3 y_{t-1} + v_t$ | $\beta_2 = 0$ |
| (g) Common factor (error autocorrelacionado) | $y_t = \beta_1 x_t + u_t$<br>$u_t = \beta_3 u_{t-1} + v_t$ | $\beta_2 = - \beta_1\beta_3$ |
| (h) Mecanismo de Corrección del Error | $\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t + (1-\beta_3)(x_{t-1} - y_{t-1}) + v_t$ | $\Sigma\beta_i = 1$ |
| (i) Forma reducida (*dead start*) | $y_t = \beta_2 x_{t-1} + \beta_3 y_{t-1} + v_t$ | $\beta_1 = 0$ |

Los nueve modelos describen muy diferentes estilos de retardos y respuestas de largo plazo de $y$ desde $x$, tiene diferentes ventajas y desventajas como descripciones de comportamientos de series de tiempo, están diversamente afectados por varios problemas de mala especificación, y finalmente, conducen a diferentes estrategias de modelización y estimación.

Los modelos (a) a (d) son claramente modelos de un parámetro, mientras (e) a (i) son de dos parámetros. Con los supuestos planteados, todos menos el modelos (g) son estimables por Mínimos Cuadrados Ordinarios (mientras (g) requiere un procedimiento iterativo por mínimos cuadrados). Cada modelo puede ser interpretado como un modelo “por derecho propio”, o también como una derivación (o una aproximación) del modelo ADL(1,1).

La generalización de cada “tipo” en términos de un número mayor de lags y/o varios regresores naturalmente aproximan los casos entre sí. En el cuadro se plantean los modelos más simples para resaltar sus diferencias y sus propiedades específicas.

De todas maneras, las restricciones necesarias para obtener los distintos casos (aún suponiendo modelos con mayor número de lags y/u otros regresores) en general son difíciles de justificar. Aún cuando pueden, en ocasiones, existir argumentos teóricos relevantes para explicar una forma específica, es siempre preferible testear el modelo seleccionado versus la forma general no restringida (el ADL(1,1)), lo que contribuye a evitar errores de especificación importantes.

A continuación se presentan comentarios sobre los modelos de la tabla (se omite el modelo de corrección de error, que ya fue presentado, y sobre el que se volverá más adelante).

### *4.1. Regresión estática*

$$y_t = \sum_j b_j x_{jt} + e_t \qquad [9]$$

Modelos del tipo:

pocas veces proveen aproximaciones útiles a procesos de series de tiempo. Esto ocurre por la posibilidad del problema de “regresiones espurias” en el caso de observaciones con una alta correlación temporal, con problemas asociados de residuos autocorrelacionados y R2 no interpretables.

En segundo lugar, el supuesto de $X_{jt}$ exógena débil respecto de los $\beta_j$ ha probado ser poco viable en la práctica.

En general la teoría económica postula relaciones de equilibrio del tipo *y=f(x)* que pueden, sin pérdida de generalidad, aproximarse por formas lineales. Pero el modelo [9] impone la restricción que la respuesta de corto y de largo plazo son idénticas e instantáneas. Es preferible plantear un modelo dinámico que reproduzca *y=f(x)*bajo supuestos de equilibrio. Esto restringe el tipo de modelo pero no el rango de las respuestas dinámicas.

Finalmente, la predicción de $y_{t+k}$ requiere predicciones de $x_{j,t+k}$

### 4.2. Modelos univariantes

En contraste, modelos univariantes de series de tiempo como los planteados en (b) se focalizan solamente en el comportamiento dinámico, pero a menudo son útiles como descripciones de los datos. La forma estacionaria general es el modelo ARMA(p,q).

Ecuaciones como $y_t = \beta_3 \; y_{t-1} + \varepsilon_t$ pueden estar sugeridos por la teoría económica y, por ejemplo, supuestos de mercados eficientes y de expectativas racionales conducen a modelos de caminata al azar $(b_3=1)$.

Por otro lado, en modelos multi-variantes cada variable tiene una representación ARMA (o ARIMA en general) pero esta reformulación puede dar lugar a varianzas grandes.

De esta manera, modelos econométricos que no ajustan mejor de procesos de series de tiempo univariantes tienen, por lo menos, errores de especificación en el comportamiento dinámico de las series, y si no logran mejores pronósticos no deberían utilizarse en análisis de políticas.

### 4.3. Modelos en diferencias

El modelo planteado en (c) se parece al (a), luego de sustituir $y_t$ por $\Delta y_t$ y $x_t$ por $\Delta x_t$.

El filtro $D = (1-L)$ es comúnmente aplicado para transformar las series en estacionarias, en la metodología Box-Jenkins, o para evitar regresiones espurias.

Si bien la ecuación de equilibrio $y_t = \beta_1 x_t$ implica $\Delta y_t = \beta_1 \Delta x_t$ la diferenciación altera en forma fundamental las propiedades del error del modelo.

De esta forma, aún cuando $y_t$ sea proporcional a $x_t$ en el equilibrio, la solución del modelo en diferencias es indeterminada (en niveles) y la estimación de $\beta_1$ en el modelo en diferencias está restringida por las varianzas relativas de $\Delta y_t$ respecto de $\Delta x_t$.

Este problema se presenta en estimaciones de la función de consumo agregado, donde es necesario reconciliar bajas propensiones <u>marginales</u> con altas y constantes propensiones <u>medias</u>.

Los autores plantean que existen otros medios para lograr variables estacionarias, como el uso de ratios, que pueden ser más adecuados con la formulación económica del problema.

### *4.4. Modelos de indicadores adelantados*

Estos modelos intentan explotar directamente diferentes desfases en las respuestas entre variables (usualmente en relación al ciclo de negocios). Por ejemplo, los pedidos a las fábricas de maquinarias pueden "adelantar" al PIB.

En la expresión:

$$y_t = \beta_2 x_{t-1} + v_t \quad \textbf{[10]}$$

Sin embargo, a menos que exista una relación de "causalidad" o de comportamiento entre las variables, $\beta_2$ puede no ser constante y pueden resultar predicciones poco creíbles. Los modelos econométricos que toman en cuenta "indirectamente" estos efectos han tendido a superar los modelos de indicadores adelantados.

### *4.5. Modelos de retardos distribuidos*

Modelos del tipo:

$$y_t = a(L)x_t + e_t \qquad [11]$$

donde $\alpha(L)$ es un polinomio de orden $m$, pueden surgir tanto de modelos estructurales como de transformaciones de otras relaciones dinámicas entre las variables.

Estos modelos frecuentemente presentan una sustancial autocorrelación en los residuos.

El hecho de que $X_t$ sea fuertemente exógena deviene en un aspecto importante para la detección y la estimación de la autocorrelación de los residuos.

La "corrección" de la autocorrelación al incluir la estimación de la autocorrelación de los errores (por el procedimiento de Cochrane-Orcutt o similares) impone "common factor restrictions" cuya validez frecuentemente es dudosa. Aún luego de remover la autocorrelación de primer orden de los errores, la ecuación puede estar alcanzada por el problema de la "regresión espuria".

Por otro lado, la colinealidad entre sucesivos lags de $X_t$ ha generado una larga literatura que trata de enfrentar el elevado número de parámetros que resultan de la formulación sin restricciones al imponer a los $\alpha_j$ (los coeficientes de $\alpha(L)$) varios tipos de restricciones *a priori*.

### *4.6. Modelos de ajuste parcial*

$$y_t = \beta_1 x_t + \beta_3 y_{t-1} + v_t \quad [12]$$

Estos son unos de los modelos más comunes en los 80s y tienen su base en la optimización de funciones cuadráticas de costos, cuando existen costos de ajuste.

La exclusión de $x_{t-1}$ (en relación al modelo ADL(1,1)), si no es válida, puede dar lugar a repercusiones importantes sobre la distribución de los efectos de $x_t$ sobre $y_t$, especialmente para valores grandes de $\beta_3$ (aunque no necesariamente ocurre para todos los casos, ver cuadro en página siguiente).

Ello puede ser parte de la explicación para los resultados empíricos de una aparente “lenta velocidad” de ajuste en versiones estimadas de [12].

Por último, en la medida que versiones como [12] resultan de derivaciones de modelos más generales (como el modelo de Koyck), el término $v_t$ de error resulta autocorrelacionado, con lo que las estimaciones por MCO son inconsistentes, al igual que sus desvíos estándar, y los tests como Durbin-Watson tampoco son válidos.

CUADRO – ERROR DE ESPECIFICACIÓN DE UN MODELO ADL(1,1)

Suponga que el PGD es un ADL(1,1):

$$y_t = x_t - 0{,}5\, x_{t-1} + 0{,}9\, y_{t-1} + v_t \qquad [A]$$

Este modelo puede ser reescrito como uno de retardos distribuidos (se excluye el término de error por simplicidad, pero en el modelo transformado queda un ruido que sigue un proceso de medias móviles):

$$y_t = x_t - 0{,}5x_{t-1} + 0{,}9y_{t-1}$$
$$(1-0{,}9L)y_t = (1-0{,}5L)x_t$$
$$\Rightarrow y_t = (1-0{,}5L)(1+0{,}9L+0{,}9^2L^2+0{,}9^3L^3+\ldots)x_t$$
$$\Rightarrow y_t = (1+0{,}4L+0{,}36L^2+0{,}324L^3+0{,}2916L^4+\ldots)x_t \qquad [B]$$

Con simulaciones de Montecarlo se estimaron 60.000 modelos especificados como de ajuste parcial ($y_t = \beta_1 x_t + \beta_3 y_{t-1} + v_t$) para una serie generada a partir del modelo [A], donde *x* y *v* son ruidos blancos normales estandarizados e incorrelacionados.

Para el modelo estimado, la estructura resultante de retardos es:

$$(1-\hat{b}_3L)y_t = \hat{b}_1x_t$$
$$\Rightarrow y_t = \hat{b}_1(1+\hat{b}_3L+\hat{b}_3^{\,2}L^2+\hat{b}_3^{\,3}L^3+\ldots)x_t$$

Para 60.000 replicaciones las medias de $\beta_1$ y $\beta_3$ fueron, respectivamente, 1,0000 y 0,8118 y el error estándar de los 60.000 casos, de 0,1107 y 0,0654.

Para el modelo especificado y para los coeficientes estimados, la estructura de retardos resulta:

$$y_t = (1+0{,}812L+0{,}659L^2+0{,}535L^3+0{,}434L^4+\ldots)x_t \qquad [C]$$

Comparando con [B] se observan coeficientes mayores en los primeros lags y, en definitiva, una mayor porción del efecto total capturado en los primeros términos de [C].

### 4.7. Representación de common factor

La representación de *common factor* se corresponde a un modelo con error autocorrelacionado. Considérese el modelo ADL(1,1) ya presentado:

$$y_t = b_1 x_t + b_2 x_{t-1} + b_3\, y_{t\text{-}1} + e_t \qquad [8]$$

Suponiendo $\beta_1 \neq 0$ se tiene:

$$(1 - b_3 L) y_t = b_1 [1 + (b_2 / b_1) L] x_t + e_t \qquad [13]$$

Bajo la condición

$$-b_3 = b_2 / b_1 \;\Rightarrow b_1 b_3 + b_2 = 0 \qquad [14]$$

ambos polinomios (el de $y_t$ y el de $x_t$) tienen un factor común. Si se cumple esta condición, dividendo ambos términos por $(1\text{-}\beta_3 L)$:

$$y_t = \frac{b_1[1 + (b_2 / b_1) L]}{(1 - b_3 L)} x_t + \frac{1}{(1 - b_3 L)} e_t = b_1 x_t + u_t$$

donde $u_t$ / $u_t = \beta_3\ u_{t\text{-}1} + \varepsilon_t$

Consecuentemente, el modelo:

$$\begin{cases} y_t = b_1 z_t + u_t \\ u_t = b_3 u_{t-1} + e_t \end{cases} \qquad [15]$$

se deriva directamente de:

$$y_t = b_1 x_t + b_3 y_{t-1} - b_1 b_3 x_{t-1} + e_t$$

y a la inversa.

Este ejemplo permite presentar dos importantes aspectos de los modelos ADL.

En primer lugar, aunque en la formulación [8] se supone un error ruido blanco (y, por lo tanto, incorrelacionado), la clase de modelos ADL no excluyen formulaciones con errores autoregresivos.

En segundo lugar, los errores autocorrelacionados producen una caso restringido de la clase de los ADL, y por lo tanto el supuesto de un error de este tipo es testeable contra un miembro menos restringido de la clase ADL.

El ejemplo anterior permite presentar los argumentos de los econometristas de la London School respecto de la corrección "automática" de modelos con "presencia" de errores autocorrelacionados.

La práctica tradicional de corrección de la autocorrelación de los residuos (diagnosticada a través del Durbin-Watson, por ejemplo) está implícitamente asumiendo un modelo de *common factor*. Es decir, se prueba la hipótesis de errores con un proceso AR(1) y luego se corrige, por ejemplo, a través del método de Cochrane-Orcutt (aunque en realidad cualquier método de estimación que suponga [15] está admitiendo un modelo de *common factor*).

El orden de las pruebas de hipótesis es primero [14] y, si no es rechazada, realizar luego la prueba de $Ho: \beta_3=0$ (que en última instancia es la hipótesis de D-W). Es decir, estimar el modelo general [8], realizar la prueba de [14], y luego probar (testear) [15].

## 5. BIBLIOGRAFÍA


- BDGH: Capitulo 1

- David F. Hendry, Adrian R. Pagan y J. Denis Sargan (1984) - “Dynamic Specification”, Capítulo 19 del *Handbook of Econometrics*, Volume II, Editado por Z. Griliches y M. D. Intriligator, Elsevier Science Publishers, BV.

- “Where are the Controversies in Ecomometric Methodology?” - C. W. J. Granger - en “Modelling Economic Series”, C. W. J. Granger (ed.), 1990, Oxford University Press.


===O===