UNIVERSIDAD TÉCNICA DE ORURO
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS, FINANCIERAS Y ADMINISTRATIVAS
DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

GUÍA DE CONSULTA ALGEBRA

Versión 1.0

Oruro – Bolivia
2014

ALGEBRA

DOCENTES

Lic. Freddy Chuca Bautista
Lic. Eddy Andrade Rocha
Lic. Rubén Vásquez Céspedes
Lic. René Medardo Salinas Lunario
Lic. Vida Delfo Condori Quispe
Lic. Tomas Edwin Choqueticlla Taborga
Lic. José Castro López
Lic. Juan Carlos Flores Espinoza
Lic. Lenny Jhovanna Flores Cáceres
Lic. Evaristo Mamani Cahuana
Lic. Jaime Vargas Gabriel
Lic. David Ángel Huallata Choque
Lic. Luz María Castro Vásquez
Lic. Milton Aro Chambi

REVISIÓN Y DIAGRAMACIÓN

Lic. Rubén Vásquez Céspedes
Lic. Freddy Chuca Bautista
Lic. Eddy Andrade Rocha

COORDINACIÓN

Lic. Isaías Marcelo Cárdenas Castillo
Univ. Kevin Félix Peña Escobar

SUPERVISIÓN

Lic. Alfonso Lucana Choque
Director Ciencias Básicas

Lic. Ángel Miranda Siles
Vice Decano

CONTENIDO

TEMA I
INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA

TEMA I
INTRODUCCIÓN AL ALGEBRA

A diferencia de la aritmética elemental, que trata de los números y las operaciones fundamentales, en álgebra -para lograr la generalización- se introducen además símbolos (usualmente *letras*) para representar parámetros (variables o coeficientes), o cantidades desconocidas (incógnitas); las expresiones así formadas son llamadas «*fórmulas algebraicas*», y expresan una regla o un principio general. El álgebra conforma una de las grandes áreas de las matemáticas, junto a la teoría de números, la geometría y el análisis.

Notación algebraica

Consiste en que los números se emplean para representar cantidades conocidas y determinadas. Las letras se emplean para representar toda clase de cantidades, ya sean conocidas o desconocidas. Las cantidades conocidas se expresan por las primeras letras del alfabeto: a, b, c, d,… Las cantidades desconocidas se representan por las últimas letras del alfabeto: u, v, w, x, y, z.

Los signos empleados en álgebra son tres clases: Signos de operación, signos de relación y signos de agrupación.

Signos de operación

En álgebra se verifican con las cantidades las mismas operaciones que en Aritmética: suma, resta, multiplicación, elevación a potencias y extracción de raíces, que se indican con los principales signos de aritmética excepto el signo de multiplicación. En lugar del signo × suele emplearse un punto entre los factores y también se indica a la multiplicación colocando los factores entre paréntesis. Así $a \cdot b$ y $(a)(b)$ equivale a $a \times b$.

Signos de relación

Se emplean estos signos para indicar la relación que existe entre dos cantidades. Los principales son: =, que se lee igual a. Así, $a=b$ se lee “a igual a b”. >, que se lee mayor que. Así, $x + y>m$ se lee “x + y mayor que m”. <, que se lee menor que. Así, $a<b + c$ se lee “a menor que $b + c$”.

Signos de agrupación

Los signos de agrupación son: el paréntesis ordinario ( ), el paréntesis angular o corchete [ ], las llaves { } y la barra o vínculo ||. Estos signos indican que la operación colocada entre ellos debe efectuarse primero. Así, $(a + b)c$ índica que el resultado de la suma a y b debe multiplicarse por c; $[a – b]m$ indica que la diferencia entre a y b debe multiplicarse por m, $\{a + b\} \div \{c – d\}$ índica que la suma de a y b debe dividirse entre la diferencia de c y d. El orden de estos signos son de la siguiente forma { [( )] }, por ejemplo: $\{ [(a + b) - c] \cdot d\}$ indica que al resultado de la suma de $a + b$ debe restarse c y el resultado de esto multiplicarse por d.

Signos y símbolos más comunes

Los signos y símbolos son utilizados en el álgebra — y en general en teoría de conjuntos y álgebra de conjuntos — con los que se constituyen ecuaciones, matrices, series, etc. Sus letras son llamadas **variables**, ya que se usa esa misma letra en otros problemas y su valor va variando.

Aquí algunos ejemplos:

Signos y símbolos	
Expresión	**Uso**
+	Además de expresar adición también es usada para expresar operaciones binarias
c o k	Expresan términos constantes
Primeras letras del abecedario $a, b, c,...$	Se utilizan para expresar cantidades conocidas
Últimas letras del abecedario $..., x, y, z$	Se utilizan para expresar incógnitas
n	Expresa cualquier número (1,2,3,4,...,n)
Exponentes y subíndices $a', a'', a'''; a_1, a_2, a_3$	Expresar cantidades de la misma especie, de diferente magnitud.

Lenguaje algebraico

Lenguaje algebraico	
Lenguaje común	**Lenguaje algebraico**
Un número cualquiera.	m
Un número cualquiera aumentado en siete.	$m + 7$
La diferencia de dos números cualesquiera.	$f - q$
El doble de un número excedido en cinco.	$2x + 5$
La división de un número entero entre su antecesor	$x/(x-1)$
La mitad de un número.	$d/2$
El cuadrado de un número	y^2
La semisuma de dos números	$(b+c)/2$
Las dos terceras partes de un número disminuidos en cinco es igual a 12.	$2/3\ (x-5) = 12$
Tres números naturales consecutivos.	$x, x + 1, x + 2$.
La parte mayor de 1200, si la menor es w	$1200 - w$
El cuadrado de un número aumentado en siete.	$b^2 + 7$
Las tres quintas partes de un número más la mitad de su consecutivo equivalen a tres.	$3/5\ p + 1/2\ (p+1) = 3$
El producto de un número con su antecesor equivale a 30.	$x(x-1) = 30$

☞ Ejemplo 1

Sean los polinomios

$$\boldsymbol{A(x) = -18x^5 - 24x^2 - 18x + 6}$$
$$\boldsymbol{B(x) = -x^5 - x^4 + 3x^2 - 6x + 8}$$
$$\boldsymbol{C(x) = 20x^5 + x^3 - 5x^2 - 15}$$

Hallar $\boldsymbol{A(x) - B(x) + C(x)}$

Operamos los monomios semejantes por separado

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & -18x^5 \qquad\quad - 24x^2 - 18x + 6 \\ -B(x) & = & \underline{+x^5 + x^4 \quad - 3x^2 + 6x - 8} \\ & & -17x^5 + x^4 \quad - 27x^2 - 12x - 2 \\ +C(x) & = & \underline{20x^5 \quad + x^3 - 5x^2 \qquad - 15} \\ & & \boldsymbol{3x^5 + x^4 + x^3 - 32x^2 - 12x - 17} \end{array}$$

Finalmente $\boldsymbol{A(x) - B(x) + C(x)} = 3x^5 + x^4 + x^3 - 32x^2 - 12x - 17$

☞ Ejemplo 2

Sean los polinomios:

$A = 2x^3+4x^2-6x+2$
$B = 4x^3-2x^2+8x-14$
$C = 2x^3+2x^2-12x-4$
$D = -x+2$

Hallar: [(A+B)-C]D

Solución:

A+B

$$\begin{array}{r} A = 2x^3+4x^2-6x+2 \\ \underline{B = 4x^3-2x^2+8x-14} \\ 6x^3+2x^2+2x-12 \end{array}$$

(A+B)-C

$$\begin{array}{r} (A+B) = 6x^3+2x^2+2x-12 \\ -C = \underline{-2x^3-2x^2+12x+4} \\ 4x^3 \qquad +14x-8 \end{array}$$

[(A+B)-C]D

$$\begin{array}{r} (A+B)-C = 4x^3+14x-8 \\ D = \underline{-x+2} \\ -4x^4 \qquad -14x^2+8x \\ \underline{8x^3 \qquad\quad +28x-16} \end{array}$$

[(A+B)-C]D $\boldsymbol{=-4x^4+8x^3-14x^2+36x-16}$

☞ Ejemplo 3

Sean los polinomios:

$A = x^3+x^2y+xy^2+y^3$
$B = y^2+10x^2$
$C = 4x^2+3y^2-6x+4y-2$
$D = 3x^2-y^2+2x^2-4y+3$

Hallar: [(C+D)-(A*B)]

Solución:

C+D

$C = 4x^2+3y^2-6x+4y-2$

$D = 3x^2 - y^2 + 2x^2 - 4y + 3$

C+D $= 7x^2+2y^2-4x \qquad +1$

(A*B)

$A = x^3+x^2y+xy^2+y^3$

$B = y^2+10x^2$

$x^3y^2 \; + \; x^2y^3 \; + \; xy^4+y^5$

$10x^5 + 10x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3$

$(A*B) = 10x^5 + 10x^4y + 11x^3y^2 + 11x^2y^3 + xy^4 + y^5$

[(C+D)-(A*B)]

C+D $= 7x^2+2y^2-4x+1$

-(A*B) $= -10x^5 -10x^4y -11x^3y^2 - 11x^2y^3 -xy^4-y^5$

[(C+D)-(A*B)] $= \boldsymbol{7x^2+2y^2-4x+1-10x^5 -10x^4y -11x^3y^2 - 11x^2y^3 -xy^4-y^5}$

☞ **Ejemplo 4**

Sean los polinomios

$\boldsymbol{M} = 3x^2 - 5x - 3 \quad \boldsymbol{N} = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1 \quad \boldsymbol{K} = x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \quad \boldsymbol{Q} = 11x^2 - 8x$

$\boldsymbol{Hallar} \left(\frac{\boldsymbol{2M + 4N + 3K}}{\boldsymbol{Q}}\right)$

Solución:

$\boldsymbol{2M} = 2(3x^2 - 5x - 3)$ Multiplicamos por 2

$\boldsymbol{4N} = 4\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + 1\right)$ Multiplicamos por 4

$\boldsymbol{3K} = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)$ Multiplicamos por 3

$\boldsymbol{2M} = (2)3x^2 - (2)5x - (2)3$

$\boldsymbol{4N} = (4)\frac{1}{2}x^2 + (4)\frac{3}{4}x + (4)1$

$\boldsymbol{3K} = (3)x^2 - (3)\frac{1}{3}x + (3)\frac{2}{3}$

$+\boldsymbol{2M} \rightarrow 6x^2 - 10x - 6$

$+\boldsymbol{4N} \rightarrow 2x^2 + 3x + 4$ Sumamos los polinomios

$+\boldsymbol{3K} \rightarrow 3x^2 - x + 2$

$11x^2 - 8x + 0$

$\left(\frac{\boldsymbol{2M + 4N + 3K}}{\boldsymbol{Q}}\right) = \frac{\cancel{11x^2 - 8x}}{\cancel{11x^2 - 8x}} = 1$

☞ Ejemplo 5

Multiplicar $(5x^3 + x^2 - 2x + 6)$ por $(-x^2 - 5x + 5)$

$$
\begin{array}{rrrrrr}
5x^3 & +x^2 & -2x & +6 & & \\
 & -x^2 & -5x & +5 & & \\
\hline
-5x^5 - x^4 & +2x^3 & -6x^2 & & & \\
-25x^4 & -5x^3 & +10x^2 & -30x & & \\
 & 25x^3 & +5x^2 & -10x & +30 & \\
\hline
-5x^5 - 26x^4 & +22x^3 & +9x^2 & -40x & +30 &
\end{array}
$$

Finalmente $(5x^3 + x^2 - 2x + 6)(-x^2 - 5x + 5) = -5x^5 - 26x^4 + 22x^3 + 9x^2 - 40x + 30$

☞ Ejemplo 6

Multiplicar: $3x^2y - xy^2 + 5y^3$ **por** $x^2y - 2xy^2 + 6y^3$

Solución:

Multiplicando: $3x^2y - xy^2 + 5y^3$

Multiplicador: $x^2y - 2xy^2 + 6y^3$

$$
\begin{array}{l}
3x^4y^2 - x^3y^3 + 5x^2y^4 \\
\qquad -6x^3y^3 + 2x^2y^4 - 10xy^5 \\
\qquad\qquad 18x^2y^4 - 6xy^5 + 30y^6 \\
\hline
3x^4y^2 - 7x^3y^3 + 25x^2y^4 - 16xy^5 + 30y^6
\end{array}
$$

☞ Ejemplo 7

Dividir

$$\frac{3x^3y^2 + 5x^2y - 6xy^2}{4x^2y}$$

$$= \frac{3x^3y^2}{4x^2y} + \frac{5x^2y}{4x^2y} - \frac{6xy^2}{4x^2y}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{xy}{} + \frac{5}{4} - \frac{3y}{2x}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{xy}{} - \frac{3y}{2x} + \frac{5}{4}$$

☞ Ejemplo 8

Dividir $45x^4 - 21x^3y - 18x^2y^2 + 21xy^3 - 9y^4$ **Entre** $15x^2 + 3xy - 9y^2$

$$
\begin{array}{l|l}
45x^4 - 21x^3y - 18x^2y^2 + 21xy^3 - 9y^4 & 15x^2 + 3xy - 9y^2 \\
\cline{2-2}
-45x^4 - 9x^3y + 27x^2y^2 & 3x^2 - 2xv + v^2 \\
\cline{1-1}
\quad -30x^3y + 9x^2y^2 + 21xy^3 - 9y^4 & \\
\quad +30x^3y + 6x^2y^2 - 18xy^3 & \\
\cline{1-1}
\qquad 15x^2y^2 + 3xy^3 - 9y^4 & \\
\qquad -15x^2y^2 - 3xy^3 + 9y^4 & \\
\cline{1-1}
\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Finalmente

$$\frac{45x^4 - 21x^3y - 18x^2y^2 + 21xy^3 - 9y^4}{15x^2 + 3xy - 9y^2} = 3x^2 - 2xy + y^2$$

☞ **Ejemplo 9**

Dividir: **$3x^2$ -5x + 4 entre 2x – 4**

Solución:
Ordenando:

$$\begin{array}{rl|l} & 3x^2 - 5x + 4 & 2x - 4 \\ \cline{3-3} & \underline{-3x^2 + 6x} & \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \\ & x + 4 & \\ & \underline{-x + 2} & \\ & 6 & \end{array}$$

Cociente: $\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
Resto: **6**

Comprobamos: Multiplicando el cociente por el divisor y sumado el resto = $\left[\left(\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right)(2x - 4)\right] + 6$

$$= \left[\frac{3}{2}x(2x - 4) + \frac{1}{2}(2x - 4)\right] + 6$$

$$= 3x^2 - 6x + x - 2 + 6$$

$= 3x^2 - 6x + x + 4$ **Se verifica que es igual al polinomio** $3x^2 - 5x + 4$

Para que el proceso de la división sea más sencillo podíamos modificar los polinomios en este ejemplo (2x – 4) dividiendo entre 2 se quedaria (x-2) **Dividir $3x^2$ -5x + 4 entre x – 2**

TEMA II
DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

TEMA II
DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL

Descomponer una expresión algebraica consiste en convertirla en el producto de sus factores. Pero que son los factores, se llaman factores o divisores de una expresión algebraica a las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la expresión original.

Descomponer una expresión algebraica consiste en convertirla en el producto de sus factores.

Los factores son las expresiones algebraicas que multiplicadas entre sí dan como producto la expresión original. En aritmética habíamos estudiado un procedimiento similar con los números que era dividir a un número por sus factores primos. En este caso se convierten polinomios por sus factores. Factorizar polinomios es algo muy distinto que con los monomios, y en algunos casos no podremos factorizarlos, por ejemplo el polinomio x+y, a menos que se utilice números complejos. Para ello se estudiarán en adelante lo que se conoce como los casos de factorización.

DIRECTRICES PARA LA FACTORIZACIÓN

1ro. Siempre busca en primer lugar un factor común.
2do. Considera el número de términos.

A) DOS TÉRMINOS:

Trata de factorizar como una diferencia de cuadrados $\left(a^2 - b^2\right)$, o como una suma o diferencia de cubos $\left(a^3 \pm b^3\right)$. Note que $\left(a^2 + b^2\right)$ no es factorizable.

B) TRES TÉRMINOS:

Vea si la expresión es un trinomio cuadrado perfecto. Si es así, factorícela. De otro modo factoriza como el trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ o trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ (usa el aspa simple).

C) MÁS DE TRES TÉRMINOS:

Trata de factorizar por agrupación de términos.

3ro. Asegúrate de que la expresión esté factorizada por completo. Es decir que cada factor restante sea primo.

ALGUNOS EJEMPLOS PARA TU ESTUDIO

☞ **Ejemplo 1**

Factorizar: $10a^2x - 40b^2x$

Solución:

- Escribimos el binomio dado, así: $10a^2x - 40b^2x$
- Extraemos el factor común $10x$, así: $10x \cdot \left(a^2 - 4b^2\right)$

- El segundo factor es otro caso de la factorización (diferencia de cuadrados), por tanto lo factorizamos, así: $(a+2b)\cdot(a-2b)$
- Luego, la expresión factorizada completamente es:

$$\underline{10a^2x-40b^2x=10x\cdot(a+2b)\cdot(a-2b)}$$

☞ Ejemplo 2

Factorizar: $2x^2+50a^2-20ax$

Solución:

- Escribimos el trinomio ordenado, así: $2x^2-20ax+50a^2$
- Extraemos el factor común 2, así: $2\cdot\left(x^2-10ax+25a^2\right)$
- El segundo factor es otro caso de la factorización (trinomio cuadrado perfecto), luego lo factorizamos, así: $2(x-5a)^2$

$$\underline{\therefore 2x^2+50a^2-20ax=2\cdot(x-5a)^2}$$ *Expresión factorizada completamente.*

☞ Ejemplo 3

Factorizar: $6x^2-20x-16$

Solución:

- Escribimos el trinomio ordenado, así: $6x^2-20x-16$
- Extraemos el factor común 2, así: $2\cdot\left(3x^2-10x-8\right)$
- El segundo factor es otro caso de la factorización (trinomio de la forma ax^2+bx+c), por tanto lo factorizamos, así: $(x-4)\cdot(3x+2)$
- Luego, la expresión factorizada completamente es:

$$\underline{6x^2-20x-16=2\cdot(x-4)\cdot(3x+2)}$$

☞ Ejemplo 4

Factorizar: $x^5y+x^2y^4-x^3y^3-y^6$

Solución:

- Escribimos el polinomio dado, así: $x^5y+x^2y^4-x^3y^3-y^6$
- Extraemos el factor común *y*, así: $y\cdot\left(x^5+x^2y^3-x^3y^2-y^5\right)$
- El segundo factor consta de cuatro términos, por tanto agrupamos los términos de dos en dos que tengan factores comunes:
-

$$\left[\left(x^5+x^2y^3\right)-\left(x^3y^2+y^5\right)\right]$$

- Extraemos el factor común de cada binomio agrupado:

$$y\cdot\left[x^2\left(x^3+y^3\right)-y^2\left(x^3+y^3\right)\right]$$

- Extraemos el factor común polinomio: $y\cdot\left(x^3+y^3\right)\cdot\left(x^2-y^2\right)$
- El segundo y tercer factor son otros casos de la factorización (suma de cubos y diferencia de cuadrados, respectivamente), por tanto lo factorizamos, así:

$$(x+y)\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)\cdot(x+y)\cdot(x-y)$$

- Luego, la expresión factorizada completamente es:

$$\underline{x^5y+x^2y^4-x^3y^3-y^6=y\cdot(x-y)\cdot(x+y)^2\cdot\left(x^2-xy+y^2\right)}$$

Ejemplo 5

Factorizar: $y^2-9a^2+12y+36$

Solución:

- Escribimos el polinomio dado, así: $y^2-9a^2+12y+36$
- No hay otro factor común más que 1 ó -1. Hay cuatro términos; y no es posible agrupar para extraer un factor binomio común. Tratemos de agrupar de la siguiente manera: $\left(y^2+12y+36\right)-9a^2$
- Factorizamos la expresión agrupada (trinomio cuadrado perfecto), así:

$$(y+6)^2-9a^2$$

- Finalmente, factorizamos la diferencia de cuadrados:

$$(y+6+3a)\cdot(y+6-3a)$$

- Luego, la expresión factorizada completamente es:

$$\underline{y^2-9a^2+12y+36=(y+6+3a)\cdot(y+6-3a)}$$

Ejemplo 6

Factorizar: $64x^{12}y^3-68x^8y^7+4x^4y^{11}=$

$= 4x^4y^3(16x^8-17x^4y^4+y^8)$ Extrayendo factor común
$= 4x^4y^3(16x^4-y^4)(x^4-y^4)$ Factorizando el trinomio
$= 4x^4y^3(4x^2+y^2)(4x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^2-y^2)$ Factorizando diferencia de cuadrados sucesivamente
$= \underline{4x^4y^3(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)}$ //R

Ejemplo 7

Factorizar: y^5+y^4+1

Consiste en sumar y restar una misma cantidad de tal manera que se forme una suma o diferencia de cubos y se presenta el factor: y^2+y+1 ó y^2-x+1. Algunas veces también se completa el polinomio.
$y^5+y^4+1=y^5-y^2+y^4+y^2+1$ Sumando y restando y^2

$= y^2 (y^3 – 1) + (y^4 + y^2 + 1)$ Agrupando y factorizando
$= y^2 (y – 1)(y^2 + y + 1) + (y^4 + y^2 + y^2 - y^2 + 1)$ Sumando y restando y^2 al segundo paréntesis
$= y^2 (y – 1)(y^2 + y + 1) + (y^4 +2y^2 + 1 – y^2)$ Agrupando y factorizando el último paréntesis
$= y^2 (y – 1)(y^2 + y + 1) + (y^2 + 1)^2 – y^2$
$= y^2 (y – 1)(y^2 + y + 1) + [(y^2 + 1) + y] [(y^2 + 1) - y]$
$= y^2 (y – 1)(y^2 + y + 1) + (y^2 + y + 1)(y^2 – y + 1)$
$= (y^2 + y + 1)[y^2 (y – 1) + (y^2 – y + 1)]$
$= (y^2 + y + 1)(y^3 – y^2 + y^2 – y + 1)$ Reduciendo en el 2º paréntesis
$\underline{\mathbf{= (y^2 + y + 1)(y^3 – y + 1)}}$ **// R**

☞ Ejemplo 8

Factorizar la siguiente expresión algebraica: x^3-x^2+x-1

Solución:

$x^3-x^2+x-1= (x^3-x^2)+(x-1) = x^2(x-1)+(x-1) = (x^2+1)(x-1)$

Respuesta:

$x^3-x^2+x-1= (x^2+1)(x-1)$

☞ Ejemplo 9

Diferencia de Cuadrados:
Factorizar la siguiente expresión algebraica: $64x^6-81y^4$

Solución:

$64x^6-81y^4= (8x^3)^2-(9y^2)^2 = (8x^3+9y^2)(8x^3-9y^2)$

Respuesta:

$64x^6-81y^4= (8x^3+9y^2)(8x^3-9y^2)$

☞ Ejemplo 10

Trinomio Cuadrado Perfecto:

Factorizar la siguiente expresión algebraica: $4a^2+12ab+9b^2$

Solución:

$4a^2 + 12ab + 9b^2 = (2a + 3b)^2$

$2a \rightarrow 2(2a)(3b) \leftarrow 3b$

Respuesta:

$4a^2+12ab+9b^2 = (2a + 3b)^2$

☞ Ejemplo 11

Otros Trinomios:
Factorizar la siguiente expresión algebraica: $y^{12}-11y^6+30$

Solución:

$y^{12}-11y^6+30=(y^6)^2-11y^6+30=(y^6-6)(y^6-5)$

Respuesta:

$y^{12}-11y^6+30=(y^6)^2-11y^6+30=(y^6-6)(y^6-5)$

☞ Ejemplo 12

Factorizar $27x^6+343y^9$
Solución:

$$\sqrt[3]{27x^6}=3x^2 \qquad \textit{Raiz cubica del primer termino}$$

$$\sqrt[3]{343y^9}=7y^3 \qquad \textit{Raiz cubica del segundo termino}$$

Por tanto $27x^6+343y^9=(3x^2+7x^3)\left((3x^2)^2-\left((3x^2)(7y^3)\right)+\left((7y^3)^2\right)\right)$

$$27x^6+343y^9=(3x^2+7x^3)(9x^4-21x^2y^3+49y^6)$$

☞ Ejemplo 13

Factorizar $9(x-y)^2+12(x-y)(x+y)+4(x+y)^2$
Solución.

$$9(x-y)^2+12(x-y)(x+y)+4(x+y)^2$$
$$\downarrow\downarrow$$
$$3(x-y)\uparrow 2(x+y)$$
$$2*3(x-y)*2(x+y)$$

Finalmente $9(x-y)^2+12(x-y)(x+y)+4(x+y)^2=[3(x-y)+2(x+y)]^2$

☞ Ejemplo 14

Factorizar $30a^4x-15a^3xz-10a^3y+5a^2yz$

$30a^4x-15a^3xz-10a^3y+5a^2yz \quad = 5a^2.(6a^2x-3axz-2ay+yz)$

$= 5a^2.[3ax(2a-z)+y.(-2a+z)]$

$= 5a^2.[3ax(2a-z)-y.(2a-z)]$

$30a^4x-15a^3xz-10a^3y+5a^2yz \quad =5a^2.(2a-z).(3ax-y)$

☞ Ejemplo 15

$27x^6+8y^9=(3x^2)^3+(2y^3)^3$

$= (3x^2+2y^3)[(3x^2)^2-(3x^2)(2y^3)+(2y^3)^2]$
$= (3x^2+2y^3)\,(9x^4-6x^2y^3+4y^6)$

☞ **Ejemplo 16**

$25x^4 + 6x^2 + 1 =$
$= 25x^4 + 6x^2 + 1 + 4x^2 – 4x^2$
$= 25x^4 + 10x^2 + 1 – 4x^2$
$= (5x^2)^2 + 2(5x^2) + 1 – 4x^2$
$= (5x^2 + 1)^2 – (2x)^2$
$= (5x^2 + 1 – 2x)(5x^2 + 1 + 2x)$

TEMA III
FRACCIONES ALGEBRAICAS

TEMA III
FRACCIONES ALGEBRAICAS

☞ **Ejemplo 1**

Simplificar la fracción:

$$\frac{x^4 - x^2 + 2x^2(x-1)}{x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x - 15}$$

Factorizando y simplificando tendremos:

$$= \frac{x^2(x^2 - 1 + 2x - 2)}{(x^4 + 2x^2 - 15) + 2x^3 + 10x}$$

$$= \frac{x^2(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 + 5)(x^2 - 3) + 2x^3 + 10x}$$

$$= \frac{x^2(x+3)(x-1)}{(x^2 + 5)(x^2 - 3) + 2x(x^2 + 5)}$$

$$= \frac{x^2(x+3)(x-1)}{(x^2 + 5)[(x^2 - 3) + 2x)]}$$

$$= \frac{x^2(x+3)(x-1)}{(x^2 + 5)(x^2 + 2x - 3)}$$

$$= \frac{x^2(x+3)(x-1)}{(x^2 + 5)(x+3)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2\underline{(x+3)}\overline{(x-1)}}{\overline{(x-1)}\underline{(x+3)}(x^2 + 5)}$$

$$= \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{x^2 + 5}}$$

☞ **Ejemplo 2**

Sumar las siguientes fracciones:

$$\frac{x+7}{x} \; ; \; \frac{x-2}{x^2 + x} \; ; \; -\frac{1-2x}{x-1}$$

Solución: Sumando las fracciones tendremos:

$$\frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x^2 + x} + \left(-\frac{1-2x}{x+1}\right) =$$ (Cambiando el signo de los términos de este numerador)

$$= \frac{x+7}{x} + \frac{x-2}{x(x+1)} + \frac{2x-1}{x+1}$$

Se obtiene el **m.c.m.** de los denominadores (común denominador)

m.c.m. $= x(x+1)$

$$= \frac{(x+1)(x+7)+(x-2)+x(2x-1)}{x(x+1)}$$

$$= \frac{x^2+8x+7+x-2+2x^2-x}{x(x+1)}$$

Factorizando el numerador y simplificando tendremos:

$$= \frac{3x^2+8x+5}{x(x+1)} = \frac{(3x+5)\cancel{(x+1)}}{x\cancel{(x+1)}}$$

$$= \frac{3x+5}{x}$$

☞ **Ejemplo 3**

Efectuar las operaciones y simplificar:

$$\left(\frac{\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{1+x}{1+x+x^2}}{\frac{1+x}{1+x+x^2}-\frac{1-x}{1-x+x^2}}\right)^{-1} * \frac{2}{x^3}$$

Solución

$$= \left(\frac{\frac{(1-x)(1+x+x^2)+(1+x)(1-x+x^2)}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}}{\frac{(1+x)(1-x+x^2)-(1-x)(1+x+x^2)}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}}\right)^{-1} * \frac{2}{x^3}$$

$$= \left(\frac{\frac{1+x+x^2-x-x^2-x^3+1-x+x^2+x-x^2+x^3}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}}{\frac{1+x+x^2+x+x^2+x^3-1-x-x^2+x+x^2+x^3}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}}\right)^{-1} * \frac{2}{x^3}$$

$$= \left(\frac{\frac{2}{(1-x+x^2)(1+x+x^2)}}{\frac{2x^3}{(1+x+x^2)(1-x+x^2)}}\right)^{-1} * \frac{2}{x^3}$$

Simplificando queda:

$$= \left(\frac{1}{x^3}\right)^{-1} * \frac{2}{x^3}$$

$$= (\cancel{x^3}) * \frac{2}{\cancel{x^3}}$$

$$= 2$$

☞ Ejemplo 4

Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{a^5 + a^4 b - a d^4 + b d^4}{a^4 - a^3 b - a^2 d^2 + a b d^2}$$

$$\frac{(a^5 + a^4 b) - (a d^4 + b d^4)}{(a^4 - a^3 b) - (a^2 d^2 + a b d^2)} = \frac{a^4 (a-b) - d^4 (a-b)}{a^3 (a-b) - a d^2 (a-b)}$$

$$= \frac{(a-b)(a^4 - d^4)}{(a-b)(a^3 - a d^2)}$$

$$= \frac{(a^4 - d^4)}{(a^3 - a d^2)}$$

$$= \frac{(a^2 - d^2)(a^2 + d^2)}{a(a^2 - d^2)}$$

$$= \frac{(a^2 + d^2)}{a}$$

Finalmente

$$\frac{a^5 + a^4 b - a d^4 + b d^4}{a^4 - a^3 b - a^2 d^2 + a b d^2} = \frac{\boldsymbol{(a^2 + d^2)}}{\boldsymbol{a}}$$

☞ Ejemplo 5

Simplificar la siguiente expresión

$$\frac{\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}}{1 - \frac{a^2 - ab - b^2}{a^2 - b^2}}$$

Solución

$$\frac{\frac{a-b}{a+b} - \frac{a+b}{a-b}}{1 - \frac{a^2 - ab - b^2}{a^2 - b^2}} = \frac{\frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{(a+b)(a-b)}}{\frac{(a^2 - b^2) - (a^2 - ab - b^2)}{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{\frac{a^2 - 2ab + b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a^2 - b^2)}}{\frac{a^2 - b^2 - a^2 + ab + b^2}{a^2 - b^2}}$$

$$= \frac{\frac{-4ab}{a^2-b^2}}{\frac{ab}{a^2-b^2}}$$

$$= \frac{-4ab(a^2-b^2)}{ab(a^2-b^2)}$$

$$\boldsymbol{Solucion = -4}$$

Ejemplo 6

$$\frac{x+\frac{15}{20}}{x+\frac{1}{2}}-\frac{x+3}{x+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x+\frac{15}{20}-(x+3)}{x+\frac{1}{2}} = \frac{x+\frac{15}{20}-x-3}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{15}{20}-3}{x+\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\frac{15-60}{20}}{x+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{-45}{20}}{\frac{2x+1}{2}} = \frac{-90}{20\,(2x+1)} = -\frac{90}{20(2x+1)}$$

$$= -\frac{9}{2(2x+1)} = -\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{4x+2}}$$

Ejemplo 7

$$A = \frac{a+\frac{1}{a-1}}{a-\frac{1}{a+\frac{1}{a}}}$$

$$A = \frac{\frac{a(a-1)+1}{a-1}}{a-\frac{1}{\frac{a*a+1}{a}}} = \frac{\frac{a^2-a+1}{a-1}}{a-\frac{1}{\frac{a^2+1}{a}}} = \frac{\frac{a^2-a+1}{a-1}}{a-\frac{1}{\frac{a^2+1}{a}}} = \frac{\frac{a^2-a+1}{a-1}}{a-\frac{a}{a^2+1}}$$

$$A = \frac{\frac{a^2-a+1}{a-1}}{\frac{a(a^2+1)-a}{a^2+1}} = \frac{\frac{a^2-a+1}{a-1}}{\frac{a^3+a-a}{a^2+1}} = \frac{\frac{a^2-a+1}{a-1}}{\frac{a^3}{a^2+1}}$$

$$A = \frac{(a^2-a+1)(a^2+1)}{a^3(a-1)}$$

Ejemplo 8

Simplificar:

$$A = \frac{a-1}{a+2-\frac{a^2+2}{a-\frac{a-2}{a+1}}} - \frac{a}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{a}}} = \frac{a-1}{a+2-\frac{a^2+2}{\frac{a(a+1)-(a-2)}{a+1}}} - \frac{a}{1-\frac{1}{\frac{a-1}{a}}}$$

$$= \frac{a-1}{a+2-\frac{a^2+2}{\frac{a^2+a-a+2}{a+1}}} - \frac{a}{1-\frac{a}{a-1}} = \frac{a-1}{a+2-\frac{(a^2+2)(a+1)}{(a^2+2)}} - \frac{a}{\frac{a-1-a}{a-1}} =$$

$$= \frac{a-1}{a+2-(a+1)} - \frac{a}{\frac{-1}{a-1}} = \frac{a-1}{a+2-a-1} - \frac{a(a-1)}{-1} = \frac{a-1}{+1} + a^2 - a =$$

$$= a-1+a^2-a$$
$$= a^2-1$$

Ejemplo 9

Simplificar la siguiente expresión algebraica

$$E = \left(\frac{x^2-8x+7}{x^2-11x+30}\right)\left(\frac{x^2-36}{x^2-1}\right) \div \left(\frac{x^2-x-42}{x^2-4x-5}\right)$$

Solucion:
Factorizamos

$$e = \frac{(x-7)(x-1)}{(x-6)(x-5)}\frac{(x-6)(x+6)}{(x+1)(x-1)} \div \frac{(x-7)(x+6)}{(x-5)(x+1)}$$

Simplificamos

$$e = \frac{(x-7)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-6)}(x-5)}\frac{\cancel{(x-6)}(x+6)}{(x+1)\cancel{(x-1)}} \div \frac{(x-7)(x+6)}{(x-5)(x+1)}$$

$$e = \frac{(x-7)}{(x-5)}\frac{(x+6)}{(x+1)} \div \frac{(x-7)(x+6)}{(x-5)(x+1)} \quad \textbf{\textit{Se multiplica cruzado}}$$

$$e = \frac{\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x-5)}}\frac{\cancel{(x+6)}\cancel{(x-5)}\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-7)}\cancel{(x+6)}}$$

$$e = \frac{1}{1}$$

$$e = 1$$

TEMA IV
ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER GRADO

TEMA IV
ECUACIÓN LINEAL DE PRIMER GRADO

☞ Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación: $\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}=3$

Solución.-

$$\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}=3$$
$$\left(\sqrt{2x+\sqrt{4x-3}}\right)^2=(3)^2$$
$$2x+\sqrt{4x-3}=9$$
$$\left(\sqrt{4x-3}\right)^2=(9-2x)^2$$
$$4x-3=81-36x+4x^2$$
$$4x-3=81-36x+4x^2$$
$$4x^2-40x+84=0$$

→ dividimos entre 4

$$x^2-10x+21=0$$
$$(x-7)(x-3)=0$$
$$x_1=7\wedge x_2=3$$

Respuesta:

$$x_1=7\wedge x_2=3$$

☞ Ejemplo 2

Resolver la siguiente ecuación $\sqrt{\mathbf{x+4}}-\sqrt{\mathbf{x-1}}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{x-1}}}$

$$\sqrt{\mathbf{x+4}}-\sqrt{\mathbf{x-1}}=\frac{\mathbf{2}}{\sqrt{\mathbf{x-1}}}$$
$$\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}\right)=2$$
$$\sqrt{x-1}\sqrt{x+4}-\left(\sqrt{(x-1)}\right)^2=2$$
$$\sqrt{(x-1)(x+4)}-(x-1)=2$$
$$\sqrt{x^2+4x-x-4}-x+1=2$$
$$\sqrt{x^2+3x-4}=2-1+x$$
$$\sqrt{x^2+3x-4}=x+1$$
$$\left(\sqrt{x^2+3x-4}\right)^2=(x+1)^2$$
$$x^2+3x-4=x^2+2x+1$$
$$\mathbf{x^2}-\mathbf{x^2}+3x-2x=1+4$$
$$\underline{\mathbf{x=5}}$$

Respuesta → x=5

Ejemplo 3

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-7 \\ 4x+2z-6y=-2 \\ 3x-\frac{3}{2}y+z=3 \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-7 & *(-2) \quad *(-3) \\ 4x-6y+2z=-2 \\ 6x-3y+2z=6 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} -4x-6y+10z=14 \\ 4x-6y+2z=-2 \\ \hline -12y+12z=12 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x-9y+15z=21 \\ 6x-3y+2z=6 \\ \hline -12y+17z=27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12y-12z=-12 \\ -12y+17z=27 \\ \hline 5z=15 \end{array}$$

$$z=3$$

$$-12y+12z=12 \quad *\left(-\frac{1}{12}\right)$$

$$y-z=-1$$
$$y-3=-1$$
$$y=2$$

$$2x+3(2)-5(3)=-7$$
$$2x+6-15=-7$$
$$2x=2$$
$$x=1$$

Ejemplo 4

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{x-\sqrt{y}+\frac{2}{z}=1} \\ \boldsymbol{2x+2\sqrt{y}-\frac{3}{z}=3} \\ \boldsymbol{-x-2\sqrt{y}+\frac{5}{z}}=0 \end{cases}$$

Solución
Realizando un cambio de variable
Sea $u = \sqrt{y}$; $v = \frac{1}{z}$

$$\begin{cases} x - u + 2v = 1 & (1) \\ 2x + 2u - 3v = 3 & (2) \\ -x - 2u + 5v = 0 & (3) \end{cases}$$

Por el método de sustitución
De la ecuación 1 despejamos x

$$x = 1 + u - 2v \qquad (4)$$

De la ecuación 3 despejamos x

$$x = -2u + 5v \qquad (5)$$

Resolvemos por el método de igualación de 4 y 5

$$x = x$$
$$1 + u - 2v = -2u + 5v$$
$$u = \frac{7v - 1}{3}$$

De la ecuación 4 en 2

$$2x + 2u - 3v = 3$$
$$2(1 + u - 2v) + 2u - 3v = 3$$
$$2 + 2u - 4v + 2u - 3v = 3$$
$$4u - 7v = 1$$
$$4\frac{(7v - 1)}{3} = 1 + 7v$$
$$(28v - 4) = 3 + 21v$$
$$7v = 7$$
$$\underline{\boldsymbol{v = 1}}$$

Por tanto

$$u = \frac{7v - 1}{3}$$
$$u = \frac{7(1) - 1}{3}$$
$$\underline{\boldsymbol{u = 2}}$$

Encontrando el valor de x

$$x = -2u + 5v$$
$$x = -2(2) + 5(1)$$
$$\underline{\boldsymbol{x = 1}}$$

Cambiando a la variable original

$u = \sqrt{y} v = \frac{1}{z}$

$(2)^2 = (\sqrt{y})^2 \quad 1 = \frac{1}{z}$

$\boldsymbol{y = 4 z = 1}$

Finalmente

$x = 1$, $\boldsymbol{y = 4}$ **,** $\boldsymbol{z = 1}$

☞ Ejemplo 5

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{y} - \frac{6}{x} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} - \frac{8}{y} = -\frac{1}{2} \\ -\frac{6}{x} + \frac{5}{y} = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

Cambio de variable

$Sea: \ u = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{1}{y}$

$$\begin{cases} 3u - 8v = -\frac{1}{2} \ m.(2) \\ -6u + 5v = -\frac{7}{4} \end{cases}$$

Reduciendo en la primera y segunda ecuación la variable 'u'

$$\begin{array}{r} 6u - 16v = -1 \\ -6u + 5v = -\frac{7}{4} \\ \hline -11v = -\frac{11}{4} \end{array}$$

$$\boldsymbol{v = \frac{1}{4}}$$

Sustituyendo $\boldsymbol{v = \frac{1}{4}}$

$$3u - 8\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$3u = \frac{3}{2}$$

$\boldsymbol{u = \frac{1}{2}}$

Sustituyendo valor de $\boldsymbol{u = \frac{1}{2}}$

$$x = \frac{1}{u}x$$

$$x = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\boldsymbol{x = 2}$$

$$y = \frac{1}{v}y = \frac{1}{\frac{1}{4}}$$

$$\boldsymbol{y = 4}$$

☞ Ejemplo 6

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 16y = -20 & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \end{cases}$$

Solución:

Analizando la primera ecuación es una ecuación de segundo grado y la segunda ecuación lineal, para la solución del problema podemos utilizar diferentes métodos en este caso utilizaremos el método de reducción (sumas y restas).

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 16y = -20 \\ x + 2y = 4 \quad m.8 \end{cases}$$

A la segunda ecuación multiplicamos por 8 tendríamos:

$$\begin{array}{r} x^2 - 4x - 16y = -20 \\ 8x + 16y = 32 \\ \hline x^2 + 4x \quad 0 = 12 \end{array}$$

$$\boldsymbol{x^2 + 4x - 12 = 0}$$

Factorizando

$(x + 6)(x - 2) = 0$

Igualando cada factor

$(x + 6) = 0$

$x + 6 = 0$

$\boldsymbol{x_1 = -6}$

$(x - 2) = 0$

$x - 2 = 0$

$\boldsymbol{x_2 = 2}$

Sustituyendo $x_1 = -6$ en la ecuación (2)

$x + 2y = 4$
$(-6) + 2y = 4$
$2y = 4 + 6$
$y = \frac{10}{2}$

$\boldsymbol{y_1 = 5}$

Sustituyendo $x_2 = 2$ en la ecuación (2)

$x + 2y = 4$
$(2) + 2y = 4$
$2y = 4 - 2$
$y = \frac{2}{2}$
$\boldsymbol{y_2 = 1}$

☞ **Ejemplo 7**
Resolver el siguiente sistema de ecuaciones, hallar el valor de ‘k’

$$\text{s.}\begin{cases} x - 3y = 3 & (1) \\ x + 2y = 4 & (2) \\ x - y = k & (3) \end{cases}$$

Reduciendo ‘x’ en la ecuación (1) y (2)

$x - 3y = 3$ m.(-1)
$\underline{x + 2y = 4}$

$-x + 3y = -3$
$\underline{\ \ x + 2y = 4}$
$5y = 1$
$\boldsymbol{y = \frac{1}{5}}$

Reemplazando $\boldsymbol{y = \frac{1}{5}}$ **en la ecuación (1)**
$x - 3y = 3$
$x - 3\frac{1}{5} = 3$
$x - \frac{3}{5} = 3$
$x = 3 + \frac{3}{5}$
$x = \frac{15 + 3}{5}$

$$\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}$$

Reemplazando $\boldsymbol{y} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$ y $\boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{18}}{\mathbf{5}}$ en la ecuación (3)

$$x - y = k$$

$$\frac{18}{5} - \frac{1}{5} = k$$

$$\frac{18-1}{5} = k$$

$$\frac{17}{5} = k$$

$$\boldsymbol{k} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{5}}$$

TEMA V
TEORÍA GENERAL DE EXPONENTES Y RADICALES

TEMA V
TEORÍA GENERAL DE EXPONENTES Y RADICALES

Recuerde

$$\boxed{(\text{BASE})^{(\text{EXPONENTE})} = \text{POTENCIA}}$$

Donde: $\begin{cases} \text{Base = Numero que se repite como factor.} \\ \text{Exponente = Numero de veces que se repite la base.} \\ \text{Potencia = resultado de la operación.} \end{cases}$

La operación matemática es la: **POTENCIACIÓN**

EXPONENTE NATURAL

Es el exponente **entero** y **positivo** que nos indica, el **número de veces** que se repite **una expresión** como **factor**.

FORMA GENERAL: $$\boxed{a^n = \begin{cases} a \;;\quad Si:\quad n=1 \\ \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\ldots\cdot a}_{"n"\ veces} \;;\quad Si:\quad n\in IN \wedge n\geq 2 \end{cases}}$$

EXPONENTE CERO O NULO

Todo número **diferente de cero** o **expresión algebraica** elevado al exponente **cero** es igual **a la unidad**.

FORMA GENERAL: $$\boxed{a^0 = 1 \quad ; \quad \forall a\in IR \quad \wedge \quad a\neq 0}$$

EXPONENTE NEGATIVO

Toda cantidad o expresión algebraica, **elevada a un exponente negativo,** es igual a una **fracción**, cuyo **numerador es la unidad** y cuyo **denominador es la misma cantidad o expresión elevada al mismo exponente pero positivo**, es decir, en la forma práctica, si el **exponente es negativo** se trabaja con el **recíproco** o **inverso** de la **base** y con el **mismo exponente** pero **positivo**, cuando la cantidad o expresión algebraica (base) sea igual a cero la definición ya no se cumple.

FORMA GENERAL: $$\boxed{a^{-1} = \frac{1}{a} \quad ;\forall a\in IR-\{0\}}$$

EXPONENTE FRACCIONARIO

Todo exponente fraccionario de la forma general $\frac{m}{n}$ indica la **extracción de una raíz** cuyo **índice es el denominador del exponente** (***n***), siendo el **numerador** (***m***) el **nuevo exponente de la base** o **cantidad subradical**.

FORMA GENERAL: $$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a}^{\,m} \quad ; \quad \forall n\in IN \quad \wedge \quad n\geq 2}$$

LEYES DE EXPONENTES

Si: $\boxed{m,n \in IN \quad \wedge \quad a,b \in IR}$; Para nuestro estudio consideraremos las siguientes leyes:

a. **Multiplicación de potencias de bases iguales** $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

b. **Potencia de exponente suma** $\boxed{a^{m+n} = a^m \cdot a^n}$

c. **División de potencias de bases iguales** $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\text{ ; donde: } a \neq 0}$

d. **Potencia de exponente diferencia** $\boxed{a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}\text{ ; donde: } a \neq 0}$

e. **Potencia de otra potencia** $\boxed{(a^m)^n = a^{m\cdot n}}$

f. **Multiplicación de potencias de igual exponente** $\boxed{a^n \cdot b^n = (a\cdot b)^n}$

g. **Potencia de una multiplicación** $\boxed{(a\cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$

h. **División de potencias de igual exponente** $\boxed{\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n\text{ ; donde: } b \neq 0}$

i. **Potencia de una división** $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}\text{ ; donde: } b \neq 0}$

<u>NOTA</u>. Las leyes expuestas para **EXPONENTES NATURALES**, pueden ampliarse a **EXPONENTES REALES**.

CASO ESPECIAL: CADENA DE EXPONENTES SUCESIVOS

La cadena de exponentes sucesivos se trabaja de **ARRIBA HACIA ABAJO**, tomados **DE DOS EN DOS**. Es decir:

$$\boxed{a^{b^{c^d}}\downarrow = a^{b^x} = a^y \quad \text{; Donde: } c^d = x \quad ; \quad b^x = y}$$

<u>MUY IMPORTANTE</u>: La cadena de exponentes sucesivos **NO ES LO MISMO** que la potencia de potencias sucesivas (potencia de otras potencias).

Es decir: $\left.\begin{array}{l} 2^{2^3} = 2^8 = 256 \\ \left(2^2\right)^3 = 2^6 = 64 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{2^{2^3} \neq \left(2^2\right)^3}$

EN GENERAL:

Cadena de exponentes sucesivos $\rightarrow$ $\boxed{a^{b^{c^d}} \neq \left[\left(a^b\right)^c\right]^d}$ $\leftarrow$ Potencia de potencias sucesivas

DEFINICIÓN DE RADICAL

La **raíz enésima** de una **cantidad** es **otra cantidad**, tal que **elevada** a la **potencia enésima** reproduce la **cantidad dada**, además de las leyes y definiciones que existen, es importante las relaciones, operaciones y transformaciones que se puedan realizar con los mismos y la operación que permite encontrar la raíz es la **radicación**.

Es decir $\boxed{\sqrt[n]{a} = r \quad \Leftrightarrow \quad r^n = a}$

Donde:
- n Es el índice, además: $n \in IN \quad \wedge \quad n \geq 2$
- a Es el radicando o cantidad subradical; si: $a \in IR$
- $\sqrt{\ }$ Es el operador radical.
- r Es la raíz; si: $r \in IR$

También, es importante recordar las siguientes igualdades:

1. $\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$; donde: $a \in IR \quad \wedge \quad n \neq 0$

2. $\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m}$; donde: $m \in IR \quad \wedge \quad n \neq 0$

LEYES DE RADICALES

Sean: $\boxed{a,b,m,n \in IR \text{ ; además: } m \neq 0 \quad \wedge \quad n \neq 0}$

a. Multiplicación de radicales de igual índice $\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}}$

b. Raíz de una multiplicación $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$

c. División de radicales de igual índice $\boxed{\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}}$; donde: $b \neq 0$

d. **Raíz de una división** $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$; donde: $b \neq 0$

e. **Raíz de otra raíz.** $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$

f. **Potencia de una raíz.** $\boxed{\sqrt[n]{a}^{\,m} = \sqrt[n]{a^m}}$

<u>Nota</u>.- En estas leyes, ningún radicando debe ser negativo cuando n es par.

ECUACIONES EXPONENCIALES
Son aquellas igualdades que contienen **a la** o **las incógnitas** sólo en el **exponente**.

FORMA GENERAL: $\boxed{a^x = b}$

Las ecuaciones exponenciales se convierten en ecuaciones algebraicas, aplicando las siguientes leyes:

<u>LEYES</u>:

I. **LEY DE BASES IGUALES.** Si: $\boxed{a^x = a^y \Rightarrow x = y \Leftrightarrow a > 0 \quad \wedge \quad a \neq 1}$

II. **LEY DE EXPONENTES IGUALES** Si: $\boxed{a^x = b^x \Rightarrow a = b \Leftrightarrow a > 0 \quad \wedge \quad b > 0}$

En este caso se admitirá que: $x = 0$; cuando: $a \neq b$

III. Si: $x^x = A$, **DONDE LA INCÓGNITA ES "*x*" SE DEBE BUSCAR FORMAR UNA ANALOGÍA O SEMEJANZA UTILIZANDO LA TEORÍA DE EXPONENTE**

También se expresa así:

$$\boxed{\begin{cases} (1) \quad x^x = a^a \Rightarrow x = a \\ (2) \quad \sqrt[x]{x} = \sqrt[n]{n} \Rightarrow x = n \end{cases} ; \quad \text{Si}: x \neq 0}$$

☞ Ejemplo 1

Simplificar:

$$\left[\frac{24.8^{2a}}{16^{3a+1} + 8^{4a+1}}\right]^{-\frac{1}{3a}}$$

Solución:

$$\left[\frac{24.8^{2a}}{16^{3a+1}+8^{4a+1}}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[\frac{24.2^{3*2a}}{2^{4(3a+1)}+2^{3(4a+1)}}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[\frac{24.2^{3*2a}}{2^{12a+4}+2^{12a+3)}}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[\frac{24.2^{3*2a}}{2^{12a}2^{4}+2^{12a}2^{3}}\right]^{-\frac{1}{3a}}$$

$$\left[\frac{24.8^{2a}}{16^{3a+1}+8^{4a+1}}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[\frac{24.2^{6a}}{2^{12a}(2^{4}+2^{3})}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[\frac{24.2^{6a}}{2^{12a}(16+8)}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[\frac{24.2^{6a\text{-}12a}}{(24)}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[\frac{2^{6a\text{-}12a}}{}\right]^{-\frac{1}{3a}}$$

$$\left[\frac{24.8^{2a}}{16^{3a+1}+8^{4a+1}}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[2^{\text{-}6a}\right]^{-\frac{1}{3a}}=\left[2\right]^{-\frac{-6a}{3a}}=\left[2\right]^{-2}=\frac{1}{2^{2}}=\frac{1}{4}$$

☞ **Ejemplo 2**

Hallar el valor de:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{n}\div\frac{\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt{n}}\times\sqrt[6]{n^5}}{\frac{\sqrt[6]{n}\div\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n}}}\right)^{6}$$

Solución:

$$\left(\frac{\sqrt[3]{n}\div\frac{\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt{n}}\times\sqrt[6]{n^5}}{\frac{\sqrt[6]{n}\div\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[3]{n}}}\right)^{6}=\left(\frac{\sqrt[3]{n}\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3}}\times\sqrt[6]{n^5}}{\frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{n}\times\sqrt[4]{n^3}}}\right)^{6}$$

$$=\left(\frac{\frac{\sqrt[3]{n}\times\sqrt{n}\times\sqrt[6]{n^5}}{\sqrt[4]{n^3}}}{\frac{\sqrt[6]{n}}{\sqrt[3]{n}\times\sqrt[4]{n^3}}}\right)^{6}$$

$$=\left(\frac{\sqrt[3]{n}\times\sqrt{n}\times\sqrt[6]{n^5}\times\sqrt[3]{n}\times\sqrt[4]{n^3}}{\sqrt[4]{n^3}\times\sqrt[6]{n}}\right)^{6}$$

$$=\frac{\left(\sqrt[3]{n}\right)^{6}\times\left(\sqrt{n}\right)^{6}\times\left(\sqrt[6]{n^5}\right)^{6}\times\left(\sqrt[3]{n}\right)^{6}\times\left(\sqrt[4]{n^3}\right)^{6}}{\left(\sqrt[4]{n^3}\right)^{6}\times\left(\sqrt[6]{n}\right)^{6}}$$

$$= \frac{n^2 \times n^3 \times n^5 \times n^2 \times \sqrt[2]{n^9}}{\sqrt[2]{n^9} \times n}$$

$$= \frac{n^{12} \times \sqrt[2]{n^9}}{\sqrt[2]{n^9} \times n}$$

$$= n^{11}$$

☞ **Ejemplo 3**

Racionalizar el denominador:

$$\frac{a\sqrt{a+b} + b\sqrt{a+b} + a\sqrt{a-b} + b\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$$

Solución:

$$= \frac{(a+b)\sqrt{a+b} + (a+b)\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$$

$$= \frac{(a+b)(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b})}{\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b}}$$

$$= \boldsymbol{a + b}$$

☞ **Ejemplo 4**

Resuelve:

$$\boldsymbol{\left[\frac{a^2 b}{c^2} \times \left(\frac{c^3}{d^2}\right)^2 \times \frac{ab^2}{a^3 b^3}\right]^{\frac{1}{4}}}$$

Primero hacemos las operaciones dentro del paréntesis:

$$\left[\frac{a^2 b}{c^2} \times \left(\frac{c^3}{d^2}\right)^2 \times \frac{ab^2}{a^3 b^3}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{a^2 b}{c^2} \times \frac{c^6}{d^4} \times \frac{ab^2}{a^3 b^3}\right]^{\frac{1}{4}}$$

En el numerador y denominador multiplicamos las potencias de la misma base:

$$\left[\frac{a^2b}{c^2} \times \frac{c^6}{d^4} \times \frac{ab^2}{a^3b^3}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{a^3 \times b^3 \times c^6}{a^3b^3c^2d^4}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\left[\frac{a^3 \times b^3 \times c^6}{a^3b^3c^2d^4}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{c^4}{d^4}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\left[\frac{c^4}{d^4}\right]^{\frac{1}{4}} = \frac{c}{d}$$

☞ **Ejemplo 5**

Resuelve:

$$\left[\frac{\boldsymbol{a^2b}}{\boldsymbol{c^2}} \times \left(\frac{\boldsymbol{c^3}}{\boldsymbol{d^2}}\right)^{\boldsymbol{2}} \times \frac{\boldsymbol{ab^2}}{\boldsymbol{a^3b^3}}\right]^{\boldsymbol{\frac{1}{4}}}$$

Primero hacemos las operaciones dentro del paréntesis:

$$\left[\frac{a^2b}{c^2} \times \left(\frac{c^3}{d^2}\right)^2 \times \frac{ab^2}{a^3b^3}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{a^2b}{c^2} \times \frac{c^6}{d^4} \times \frac{ab^2}{a^3b^3}\right]^{\frac{1}{4}}$$

En el numerador y denominador multiplicamos las potencias de la misma base:

$$\left[\frac{a^2b}{c^2} \times \frac{c^6}{d^4} \times \frac{ab^2}{a^3b^3}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{a^3 \times b^3 \times c^6}{a^3b^3c^2d^4}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\left[\frac{a^3 \times b^3 \times c^6}{a^3b^3c^2d^4}\right]^{\frac{1}{4}} = \left[\frac{c^4}{d^4}\right]^{\frac{1}{4}}$$

$$\left[\frac{c^4}{d^4}\right]^{\frac{1}{4}} = \frac{c}{d}$$

☞ **Ejemplo 6**

Simplificar:

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n+1}}{\sqrt[n+2]{9\sqrt{9^n}}}}$$

Solución:

$$\sqrt[n]{\frac{3^{n*1}}{\sqrt[n+2]{9\sqrt{9^n}}}}=\sqrt[n]{\frac{3^n*3}{\sqrt[n+2]{9(\sqrt{9})^n}}}=\sqrt[n]{\frac{3^n*3}{\sqrt[n+2]{3^2(3)^n}}}=\sqrt[n]{\frac{3^n*3}{\sqrt[n+2]{3^{n+2}}}}=\sqrt[n]{\frac{3^n*3}{3}}=\sqrt[n]{3^n}=3$$

☞ **Ejemplo 7**

Simplificar la expresión:

$$E=\left[(8a^6)^{-3^{-1}}*\frac{1}{(a^{-2})^{2^{-1}}}+(4a^2)^{-2^{-1}}\right]^{-1}$$

$$E=\left[(8a^6)^{-\frac{1}{3}}*\frac{1}{(a^{-2})^{\frac{1}{2}}}+(2^2a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$E=\left[\frac{1}{(2^3a^6)^{\frac{1}{3}}}*\frac{1}{(a^{-2})^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{(2^2a^2)^{\frac{1}{2}}}\right]^{-1}$$

$$E=\left[\frac{1}{2a^2}*\frac{1}{a^{-1}}+\frac{1}{2a}\right]^{-1}$$

$$E=\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}\right]^{-1}$$

$$E=\left[\frac{2}{2a}\right]^{-1}=\left[\frac{1}{a}\right]^{-1}$$

$$\boxed{E=a}$$

☞ **Ejemplo 8**

Calcular el valor de la siguiente expresión:

$$E=\left[2^{-\sqrt[2]{2}}\right]^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt[4]{9}}}=\left[2^{-\sqrt[2]{2}}\right]^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt[4]{3^2}}}=\left[2^{-\sqrt[2]{2}}\right]^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}}$$

$$E = \left[2^{-\sqrt[2]{2}}\right]^{\sqrt{2}^{\sqrt{3}.\sqrt{3}}} = \left[2^{-\sqrt[2]{2}}\right]^{\sqrt{2}^{3}}$$

$$E = 2^{-\sqrt[2]{2}.\sqrt{2}^{3}} = 2^{2^{-\frac{1}{2}}\, 2^{\frac{3}{2}}} = 2^{2^{1}}$$

$$E = 2^{2} = \boxed{4}$$

Ejemplo 9

Resolver la siguiente operación:

$$E = 11\sqrt{\tfrac{1}{3}} - \tfrac{1}{10}\sqrt{75} - \tfrac{5}{6}\sqrt{27} + 3\sqrt{\tfrac{1}{27}}$$

$$E = 11\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{10}\sqrt{5^{2}.3} - \frac{5}{6}\sqrt{3^{2}.3} + 3\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3^{2}.3}}$$

$$E = 11\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\cancel{5}}{\cancel{10}}\sqrt{3} - \frac{5.\cancel{3}}{\cancel{6}}\sqrt{3} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}\sqrt{3}}$$ Racionalizando de nominadores radicales:

$$E = 11\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$E = \frac{11}{3}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3}$$ M.C.M. = 6

$$E = \frac{22\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 15\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6}$$

$$E = \frac{24\sqrt{3} - 18\sqrt{3}}{6}$$

$$E = \frac{\cancel{6}\sqrt{3}}{\cancel{6}}$$

$$E = \boxed{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 10

Simplificar:

$$E = \frac{\sqrt{X + \sqrt{X^{2} - \sqrt[3]{X}}}}{\sqrt{X + \sqrt[6]{X}} + \sqrt{X - \sqrt[6]{X}}}$$

Transformando el numerador de la siguiente manera:

$$\sqrt{X + \sqrt{X^{2} - \sqrt[3]{X}}} = \sqrt{X + \sqrt{\left(X + \sqrt[6]{X}\right)\left(X - \sqrt[6]{X}\right)}}$$

$$= \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt[6]{x}}.\sqrt{x - \sqrt[6]{x}}}$$

Multiplicando y dividiendo por 2 la expresión subradical:

$$= \sqrt{\frac{2x+2\sqrt{x+\sqrt[6]{x}}\sqrt{x-\sqrt[6]{x}}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt[6]{x}}+\sqrt{x-\sqrt[6]{x}}\right)^2}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{x+\sqrt[6]{x}}+\sqrt{x-\sqrt[6]{x}}}{\sqrt{2}}$$

Reemplazando en el planteamiento original:

$$E = \frac{\cancel{\sqrt{x+\sqrt[6]{x}}+\sqrt{x-\sqrt[6]{x}}}}{\sqrt{2}\left(\cancel{\sqrt{x+\sqrt[6]{x}}+\sqrt{x-\sqrt[6]{x}}}\right)} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

☞ **Ejemplo 11**

Racionalice el denominador

$$\frac{\mathbf{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}}{\mathbf{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}}$$

Solución

$$= \frac{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}}{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}\frac{(\boldsymbol{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}})}{(\boldsymbol{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}})}$$

$$= \frac{(a\sqrt{b} - b\sqrt{a})(\boldsymbol{a\sqrt{b} - b\sqrt{a}})}{(a\sqrt{b})^2 - (b\sqrt{a})^2}$$

$$= \frac{(a\sqrt{b})^2 - ab\sqrt{ab} - ab\sqrt{ab} + (b\sqrt{a})^2}{a^2b - ab^2}$$

$$= \frac{a^2b + ab^2 - 2ab\sqrt{ab}}{a^2b - ab^2}$$

$$= \frac{a^2b + ab^2 - 2ab\sqrt{ab}}{a^2b - ab^2}$$

$$= \frac{\cancel{ab}\left(a + b - 2\sqrt{ab}\right)}{\cancel{ab}(a - b)}$$

$$= \frac{\boldsymbol{a + b - 2\sqrt{ab}}}{\boldsymbol{a - b}}$$

TEMA VI
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

TEMA VI
ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

☞ Ejemplo 1

Resolver:

$$x-\sqrt{2x-4}=6$$

$x-6=\sqrt{2x-4}$ Aislamos el radical

$(x-6)^2=(\sqrt{2x-4})^2$ Elevamos el cuadrado

$x^2 - 12x + 36 = 2x - 4$

$x^2 - 14x + 40 = 0$ Forma canónica

$x=\dfrac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(1)(40)}}{2(1)}=\dfrac{14\pm 6}{2}$ Fórmula de segundo grado

⇨ $x_1=\dfrac{14+6}{2}=10$; $x_2=\dfrac{14-6}{2}=4$

Remplazando valores, verificamos en la ecuación inicial

Si: $x_1=10$ en $x-\sqrt{2x-4}=6$ => $10-\sqrt{2(10)-4}=6 \Rightarrow 6=6$ **(por tanto x = 10 es solución)**

Si: $x_2=4$ en $x-\sqrt{2x-4}=6$ => $4-\sqrt{2(4)-4}=6 \Rightarrow 2\neq 6$ **(por tanto x = 4 no es solución)**

☞ Ejemplo 2

Resolver la ecuación

$$x^2 - 10x + 25 = 0$$

Si: $x^2 - 10x + 25 = 0$

➔ raíz cuadrada de $x^2 \rightarrow x$ y de $25 \rightarrow 5$

Luego: $(x-5)^2 = 0$

$(x-5)(x-5) = 0$

$\mathbf{x_{1,2} = 5}$

Ejemplo: Resolver la ecuación

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$

Si: $x^2 + 2x + 4 = 0$

➔ raíz cuadrada de $x^2 \rightarrow x$ y de $4 \rightarrow 2$

Luego: $(x+2)^2 = 0$

$$(x + 2)(x + 2) = 0$$
$$\mathbf{x_{1,2} = -2}$$

☞ **Ejemplo 3**

Resolver:

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$x^2 + 7x + 10 = 0 \Rightarrow a = 1;\ b = 7;\ c = 10$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2(1)}$$

$$x_1 = \frac{-7+3}{2} = -2; \qquad x_2 = \frac{-7-3}{2} = -5$$

☞ **Ejemplo 4**

Resolver:

$3x^2 + 5x - 8 = 0$

$3x^2 + 5x - 8 = 0 \Rightarrow a = 3;\ b = 5;\ c = -8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(3)(-8)}}{2(3)}$$

$$x_1 = \frac{-5+11}{6} = 1; \qquad x_2 = \frac{-5-11}{6} = -\frac{8}{3}$$

☞ **Ejemplo 5**

Dos números naturales se diferencian en dos unidades y la suma de sus cuadrados es 580. ¿Cuáles son esos números?

1er número → x
2º número → x + 2

$$x^2 + (x+2)^2 = 580$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 580$$
$$2x^2 + 4x - 576 = 0$$
$$x^2 + 2x - 288 = 0$$

$$x = \frac{-2 \mp \sqrt{4 + 1152}}{2}$$

$$\boldsymbol{x_1 = 16} \qquad \boldsymbol{x_2 = -18}$$

☞ **Ejemplo 6**

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{3(5^{x}) + 2(6^{y+1}) = 807} \\ \mathbf{15(5^{x-1}) - 6^{y} = 339} \end{cases}$$

Solución

$$3(5^{x}) + 2(6^{y})(6^{1}) = 807$$
$$15(5^{x})(5^{-1}) - 6^{y} = 339$$

$$3(5^{x}) + 12(6^{y}) = 807$$
$$\frac{15}{5}(5^{x}) - 6^{y} = 339$$

$$3(5^{x}) + 12(6^{y}) = 807$$
$$3(5^{x}) - 6^{y} = 339$$

Realizando cambio de variable

$$u = 5^{x} \qquad\qquad v = 6^{y}$$
$$3u + 12v = 807 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1$$
$$3u - v = 339 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. 2$$

Resolviendo el sistema por el método de sustitución

Despejando v de ecuación 2 $\quad v = 3u - 339 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$

Reemplazando ecuación 3 en 1

$$3u + 12v = 807$$
$$3u + 12(3u - 339) = 807$$
$$3u + 36u - 4068 = 807$$
$$39u = 4875$$
$$\boldsymbol{u = 125}$$

Reemplazando u=125 en ecuación 3

$$v = 3u - 339$$
$$v = 3(125) - 339$$
$$\boldsymbol{v = 36}$$

Reemplazando u=125 y v=36 en el cambio de variable

$$u = 5^{x} \qquad\qquad v = 6^{y}$$
$$125 = 5^{x} \qquad\qquad 36 = 6^{y}$$
$$5^{3} = 5^{x} \qquad\qquad 6^{2} = 6^{y}$$

$$\boldsymbol{x = 3} \qquad\qquad \boldsymbol{y = 2}$$

TEMA VII
LOGARITMOS

TEMA VII
LOGARITMOS

Ejemplo 1

Resolver la siguiente ecuación

$$\log(2^{2-x})^{2+x} + \log 1250 = 4$$

Solución:

$$\log 2^{(2-x)(2+x)} + \log 1250 = 4$$
$$\log 2^{(2-x)(2+x)} = 4 - \log 1250$$

Expresando en número 4 en función del logaritmo: $4 = \log 10000 = \log 10^4$

$$\log 2^{(2-x)(2+x)} = \log 10^4 - \log 1250$$

Aplicando la propiedad reciproca del logaritmo de un cociente:

$$\log 2^{(2-x)(2+x)} = \log \frac{10000}{1250}$$

Eliminando logaritmos

$$2^{(2-x)(2+x)} = \frac{10000}{1250}$$
$$2^{(2-x)(2+x)} = 8$$
$$2^{4-x^2} = 2^3$$
$$4 - x^2 = 3$$
$$x^2 = 4 - 3$$
$$x^2 = 1$$
$$x = \mp\sqrt{1}$$
$$x = 1 \qquad x = -1$$

Nota. Las dos soluciones son validas.

Ejemplo 2

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \log(x + y) + \log(x - y) = \log 33 \\ (e^x)(e^y) = e^{11} \end{cases}$$

Solución

Aplicando propiedades de logaritmos y exponentes

$$\log(a) + \log(b) = \log(a \cdot b)$$
$$(a^n)(a^m) = a^{n+m}$$

$$\log[(x + y)(x - y)] = \log 33 \qquad (1)$$
$$(e^{x+y}) = e^{11} \qquad (2)$$

Eliminando logaritmos de ecuación (1)

$$\cancel{\log}[(x+y)(x-y)] = \cancel{\log}33$$
$$(x+y)(x-y) = 33 \qquad (3)$$

Eliminando "e" de la ecuación (2)

$$e^{x+y} = e^{11}$$
$$x+y = 11 \qquad (4)$$

Reemplazando ecuación (4) en ecuación (3)

$$(x+y)(x-y) = 33$$
$$11(x-y) = 33$$
$$11(x-y) = 33$$
$$(x-y) = 3$$
$$x = 3+y \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (4)

$$x+y = 11$$
$$3+y+y = 11$$
$$2y = 8$$
$$y = 4$$

Reemplazando y=4 en ecuación (5)

$$x = 3+y$$
$$x = 3+4$$
$$x = 7$$

Finalmente

$$x = 7 \;\wedge\; y = 4$$

☞ Ejemplo 3

Resolver la ecuación:

$$10^{x^2-5x+8} = 100$$

Solución:

$$10^{x^2-5x+8} = 10^2$$
$$x^2-5x+8 = 2$$
$$x^2-5x+6 = 0$$
$$(x-2)(x-3) = 0$$
$$x_1 = 2 \;;\; x_2 = 3$$

☞ Ejemplo 4

Resolver la ecuación:

$$\log_x 2 + \log_{x^2} 4 - \log_{\sqrt{x}} 3 = 2$$

Solución:

Cambiamos de base

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} + \frac{\log_2 4}{\log_2 x^2} - \frac{\log_2 3}{\log_2 \sqrt{x}} = 2$$

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} + \frac{\log_2 2^2}{\log_2 x^2} - \frac{\log_2 3}{\log_2 x^{1/2}} = 2$$

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 x} + \frac{2 \cdot \log_2 2}{2 \cdot \log_2 x} - \frac{\log_2 3}{\frac{1}{2} \cdot \log_2 x} = 2$$

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{\log_2 x} - \frac{2\log_2 3}{\log_2 x} = 2$$

$$\frac{1 + 1 - 2\log_2 3}{\log_2 x} = 2$$

$$2 - 2\log_2 3 = 2\log_2 x$$

$$2\log_2 x = 2 - 2\log_2 3$$

$$\log_2 x = 1 - \log_2 3$$

$$\log_2 x = \log_2 2 - \log_2 3$$

$$\log_2 x = \log_2 \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{2}{3}$$

☞ Ejemplo 5

Hallar el valor de la siguiente expresión:

$$\frac{log_{a-b}\sqrt{\frac{1}{a-b}} + log_{\frac{a}{b}}\frac{b}{a}}{log_{a+b}\sqrt{a+b}}$$

Solución:

$$\frac{log_{a-b}\sqrt{\frac{1}{a-b}}+log_{\frac{a}{b}}\frac{b}{a}}{log_{a+b}\sqrt{a+b}} = \frac{log_{a-b}(a-b)^{-\frac{1}{2}}+log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}}{log_{a+b}(a+b)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\cdot \cancelto{1}{log_{a-b}(a-b)} - \cancelto{1}{log_{\frac{a}{b}}\left(\frac{a}{b}\right)}}{\frac{1}{2}\cdot \cancelto{1}{log_{a+b}(a+b)}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = -3$$

Finalmente:

$$\frac{log_{a-b}\sqrt{\frac{1}{a-b}} + log_{\frac{a}{b}}\frac{b}{a}}{log_{a+b}\sqrt{a+b}} = -3$$

Ejemplo 6

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} \log_a \log_2 \log_3(4x + 3y) = 0 & (1) \\ 2^{2x-3y-1} = 256 & (2) \end{cases}$$

Solución:

En la ecuación (1) por definición de logaritmos:

$$\log_2 \log_3(4x + 3y) = a^0 = 1$$
$$\log_3(4x + 3y) = 2^1 = 2$$
$$(4x + 3y) = 3^2 = 9$$
$$4x + 3y = 9 \qquad (1')$$

En la ecuación (2) como $256 = 2^8$:

$$2^{2x-3y-1} = 2^8$$
$$2x - 3y - 1 = 8$$
$$2x - 3y = 9 \qquad (2')$$

Formamos el sistema:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 9 & (1') \\ 2x - 3y = 9 & (2') \end{cases}$$

Por el Método de reducción:

$$4x + \cancel{3y} = 9 \qquad (x1)$$
$$2x - \cancel{3y} = 9 \qquad (x1)$$
$$6x \qquad = 18$$
$$x = \frac{18}{6} = 3$$

$$\cancel{4x} + 3y = 9 \qquad (x1)$$
$$-\cancel{4x} + 6y = -18 \qquad x(-2)$$
$$9y = -9$$
$$y = \frac{-9}{9} = -1$$

$$\boldsymbol{x = 3} \qquad \boldsymbol{y = -1}$$